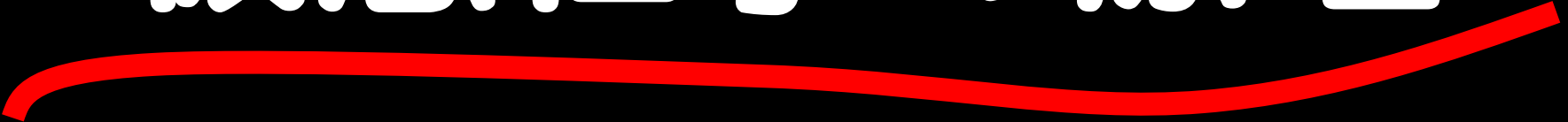


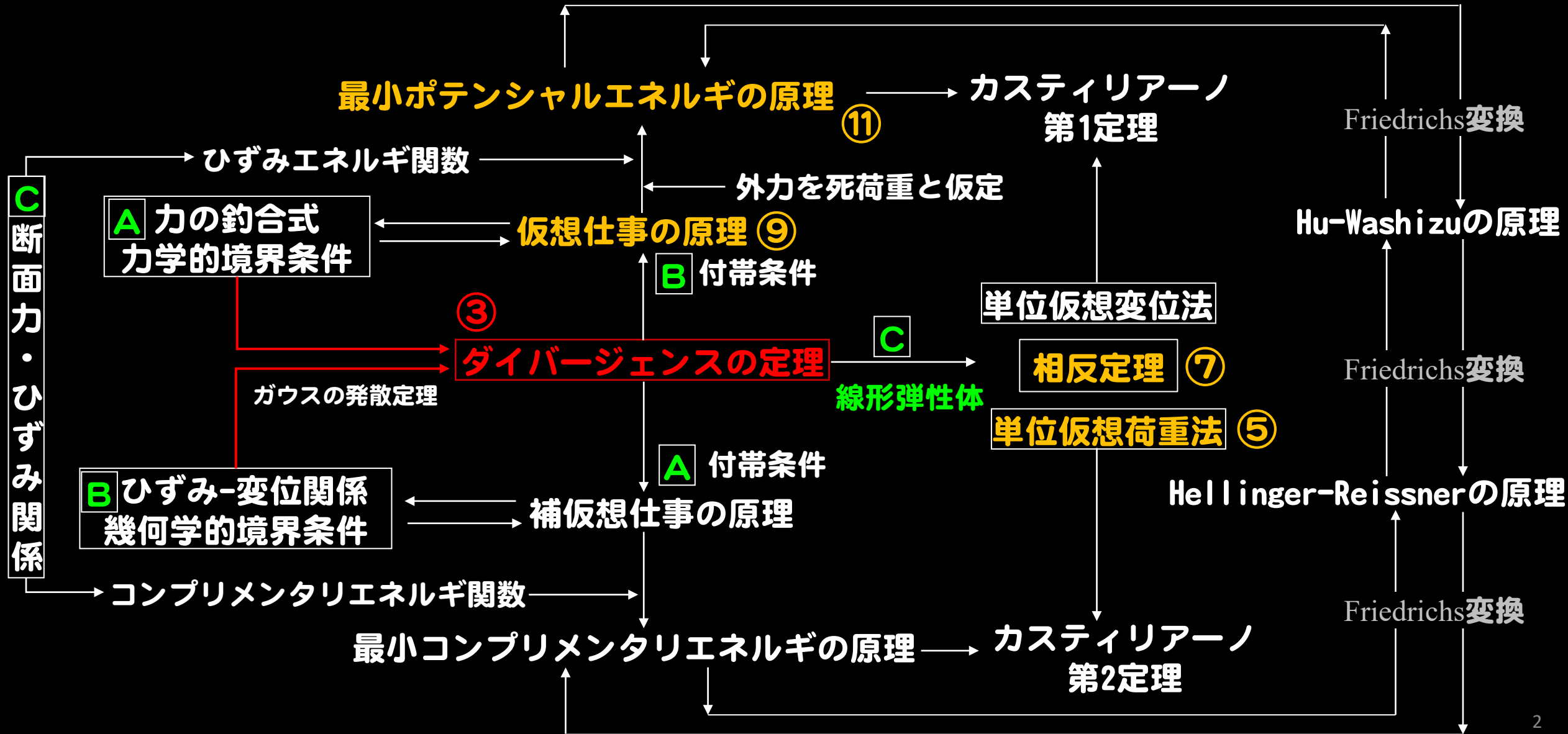
仮想仕事の原理



⑬ 近似解法

城戸將江・津田恵吾 2021.07

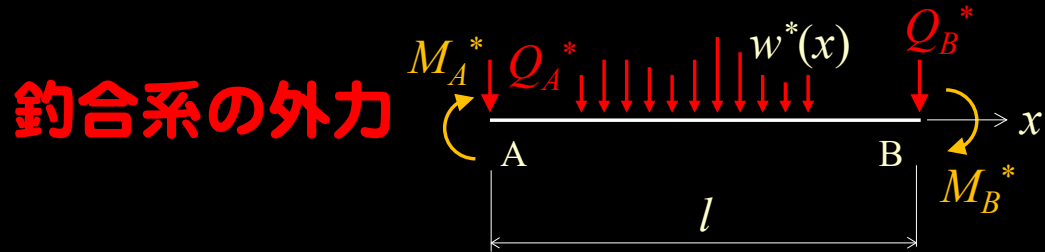
仕事の原理・エネルギー原理の全体像



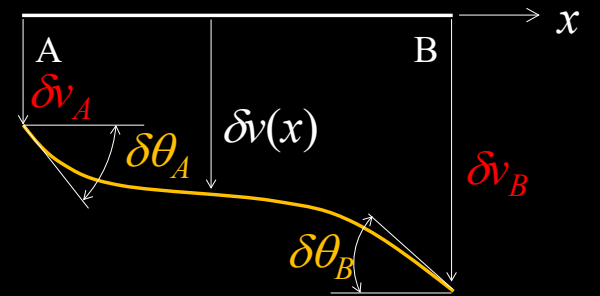
仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法 1

仮想仕事式

$$Q_A^* \cdot \delta v_A + M_A^* \cdot \delta \theta_A + Q_B^* \cdot \delta v_B + M_B^* \cdot \delta \theta_B + \int_0^l w^*(x) \delta v(x) dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \delta \phi(x) dx$$



適合系の仮想変位



- ①たわみ v の仮定 ②たわみの第一変分 δv ③ δv に対応する曲率 $\delta \phi$

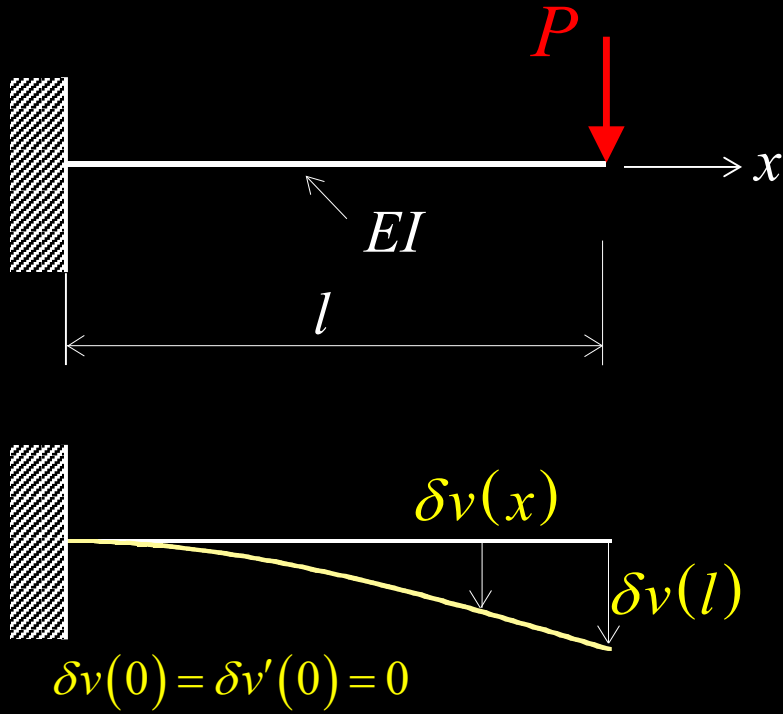
$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \Rightarrow \delta v(x) = \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i(x) \Rightarrow \delta \phi(x) = \delta(-v''(x)) = -(\delta(v(x)))'' = -\sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i''(x)$$

④断面力

$$M^* = EI \phi^* \equiv -EI \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i''(x) \quad \left(\because \phi^*(x) = -v''(x) \equiv -\sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i''(x) \right) \Rightarrow \text{⑤ ②, ③, ④式を仮想仕事式に代入}$$

- ⑦ a_i に関する連立方程式 ← ⑥任意の δa_i に対して成立

仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法 2



⑨仮想仕事の原理で，左図の片持ち梁で，仮想仕事式は下式となることを示した。

$$P \cdot \delta v(l) = \int_0^l M \cdot \delta \phi dx$$

ひずみ—変位関係と幾何学的境界条件を満足する**任意の仮想変位**に対して上式が恒等的に成立つことより，下式を得た。

$$M''(x) = 0 \quad P - M'(l) = 0 \quad M(l) = 0$$

すなわち，釣合微分方程式と $x=l$ における力学的境界条件が得られた。

仮想変位は幾何学的境界条件

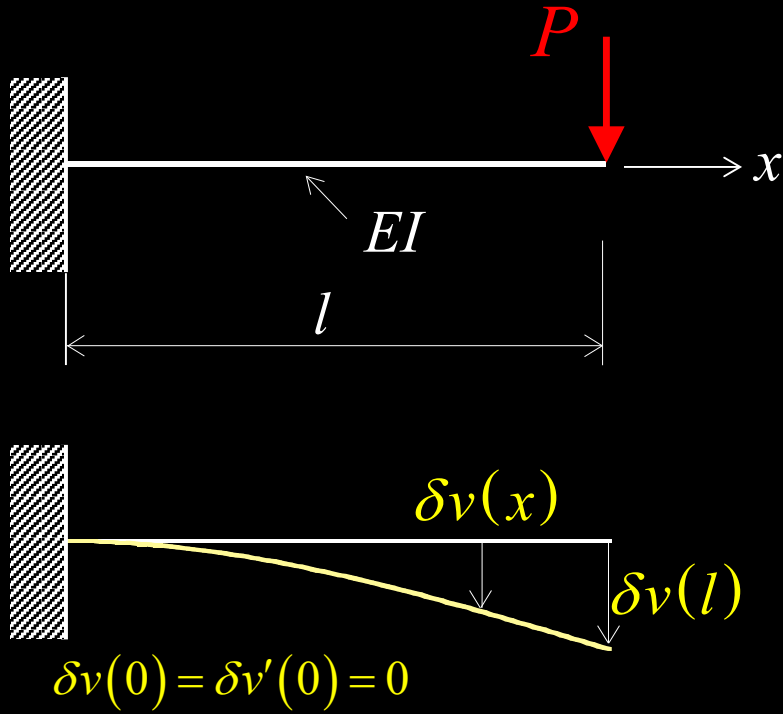
$$\delta v(0) = \delta v'(0) = 0$$

ひずみ—変位関係

$$\delta \phi(x) = -(\delta v(x))''$$

を拘束条件とする

仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法 3



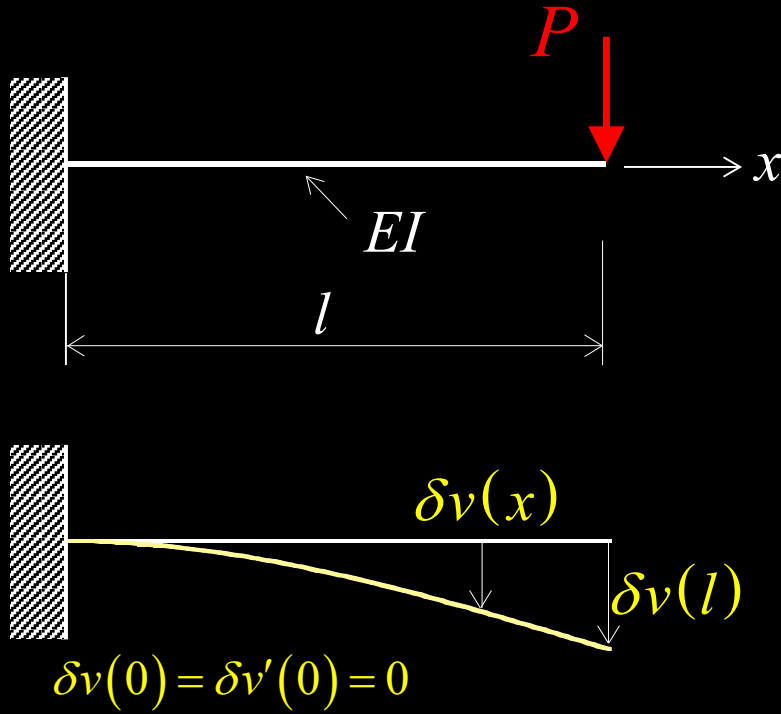
仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法では、適合系の**たわみを仮定**する。この時、仮定するたわみは**幾何学的境界条件**を満足する必要がある。例えば、下式のように仮定する。

$$v(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3$$

上式のたわみに対して、**たわみの変分**、すなわち**仮想変位** $\delta v(x)$ は下式となる。

$$\delta v(x) = x^2 \cdot \delta a_2 + x^3 \cdot \delta a_3$$

仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法 4



仮想仕事式は下式であるが、

$$P \cdot \delta v(l) = \int_0^l M \cdot \delta \phi dx$$

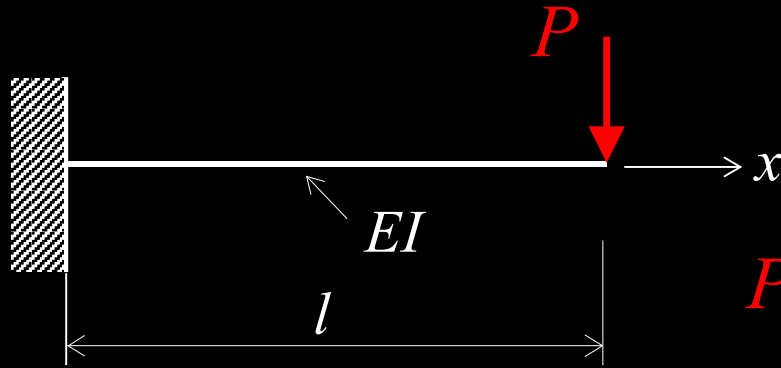
仮想仕事に原理に基礎をおく**近似解法**では、上式
 右辺の **M** に断面力-ひずみ関係 ($M = EI\phi$) を用い、
 この時 ϕ に仮定したたわみに対応する物を用いる。

$$v(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 \Rightarrow \phi = -v'' = -2a_2 - 6xa_3$$

$$\delta v(x) = x^2 \cdot \delta a_2 + x^3 \cdot \delta a_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta v(l) = l^2 \cdot \delta a_2 + l^3 \cdot \delta a_3 \\ \delta \phi(x) = -\delta v''(x) = -(\delta v(x))'' = -2\delta a_2 - 6x \cdot \delta a_3 \end{cases}$$

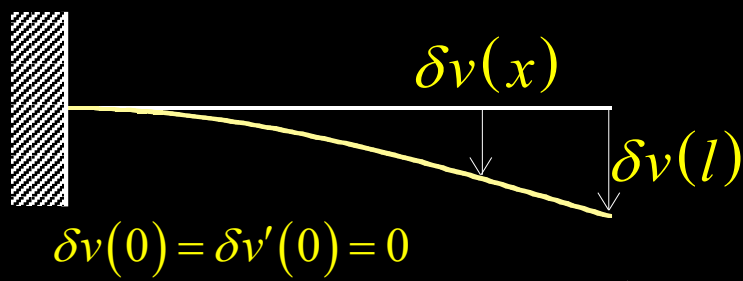
仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法 5



仮想仕事式に代入すると下式が得られる。

$$P \cdot \delta v(l) = \int_0^l M \cdot \delta \phi dx$$

$$P(l^2 \delta a_2 + l^3 \delta a_3) = \int_0^l EI(-2a_2 - 6xa_3) \cdot (-2\delta a_2 - 6x \cdot \delta a_3) dx$$



上式を整理すると下式となる。

$$\left\{ EI(4la_2 + 6l^2a_3) - Pl^2 \right\} \delta a_2 + \left\{ EI(6l^2a_2 + 12l^3a_3) - Pl^3 \right\} \delta a_3 = 0$$

任意の δa_2 , δa_3 に対して上式が成立することより下式が得られる。

$$\begin{cases} EI(4la_2 + 6l^2a_3) - Pl^2 = 0 \\ EI(6l^2a_2 + 12l^3a_3) - Pl^3 = 0 \end{cases}$$

仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法 6

$$\left. \begin{array}{l} EI(4la_2 + 6l^2a_3) - Pl^2 = 0 \\ EI(6l^2a_2 + 12l^3a_3) - Pl^3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_2 = \frac{Pl}{2EI} \\ a_3 = -\frac{P}{6EI} \end{array} \right\}$$

したがって、たわみとして下式が得られる。

$$v(x) = a_2x^2 + a_3x^3 = \frac{Pl}{2EI}x^2 - \frac{P}{6EI}x^3 = \frac{Pl^3}{6EI} \left\{ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\}$$

上式は**正解**のたわみを与えている (②構造力学の「構造」例題 例題1参照)。

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法1

最小ポテンシャルエネルギーの原理

$$\Pi [v^*(x)] \geq \Pi [v(x)]$$

幾何学的境界条件を満足する変位 $v^*(x)$ の内、**正解** $v(x)$ が Π を最小にすることを主張する。

Π は関数 $v(x)$ の関数 (→ **汎関数**)

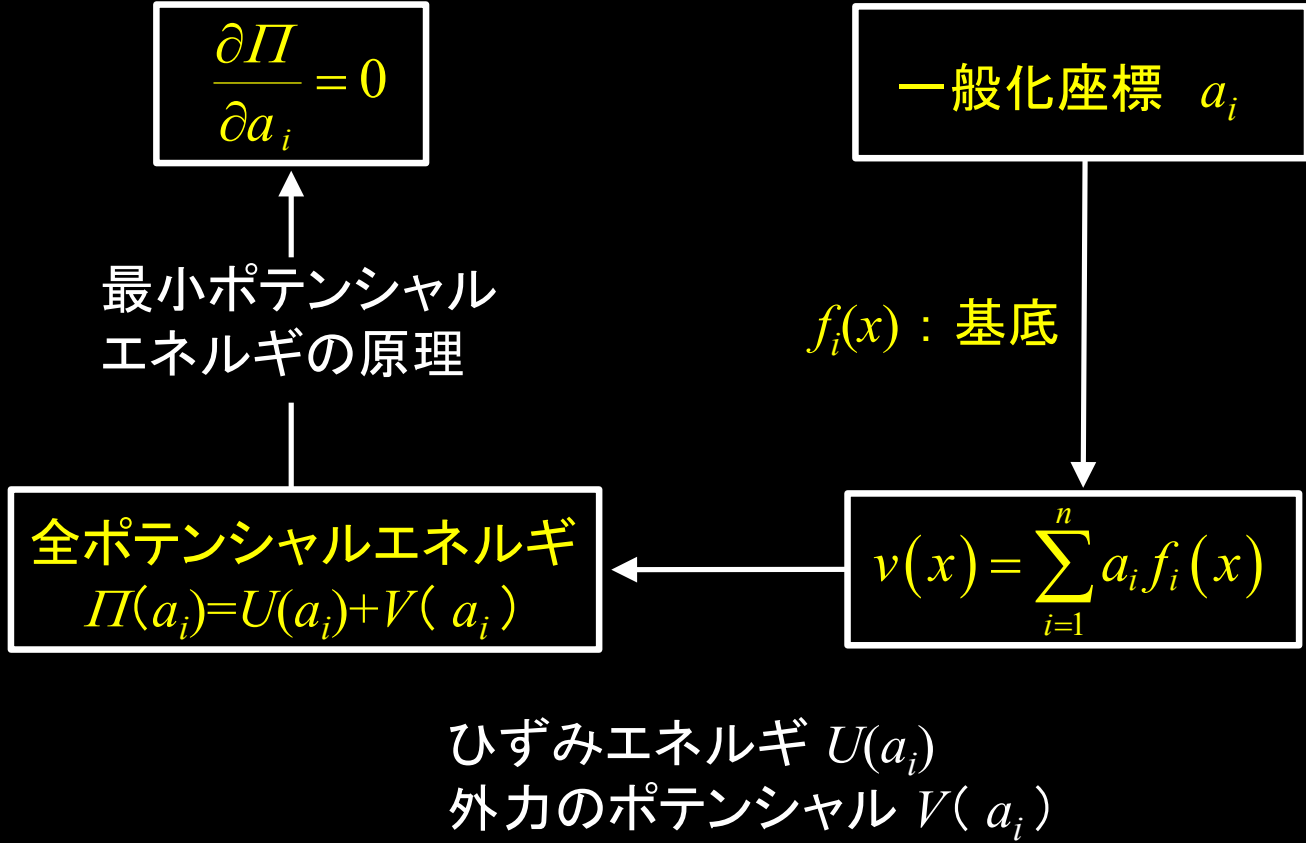
↓

Π を最小にする関数 $v(x)$ を求める

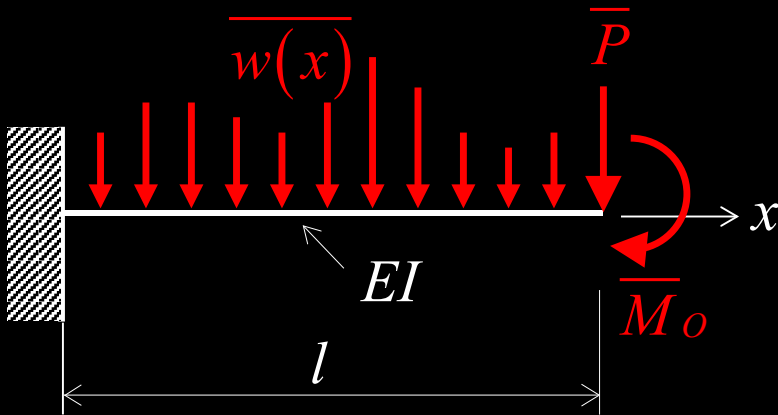
↓ **第一変分 $\delta\Pi = 0$**

変分法の問題

Rayleigh-Ritz法 直接法



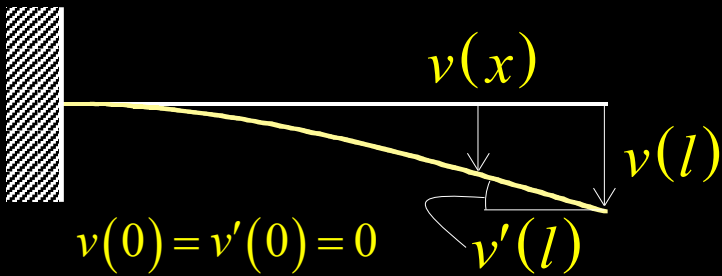
最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法2



⑪最小ポテンシャルエネルギーの原理で、左図の片持ち梁で、全ポテンシャルエネルギーは下式となることを示した。

$$\Pi[v(x)] = \int_0^l \frac{EIv''^2}{2} dx - \bar{P} \cdot v(l) - \bar{M}_o \cdot v'(l) - \int_0^l \bar{w} \cdot v dx$$

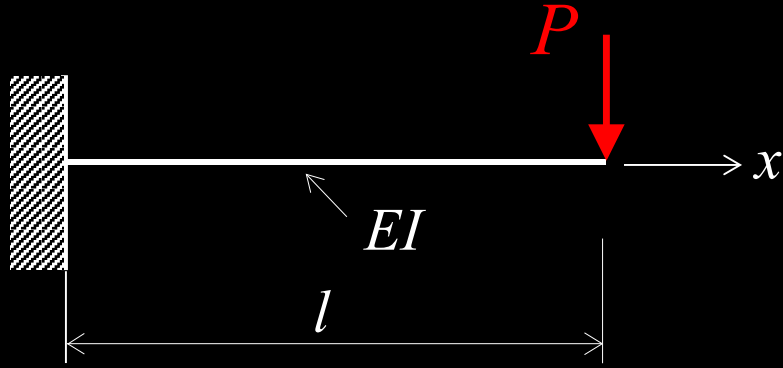
Π が最小値を取る条件 $\delta\Pi=0$ より下式を得た。



$$EIv^{IV} = \bar{w}, \quad -EIv''(l) = -\bar{M}_o, \quad -EIv'''(l) = \bar{P}$$

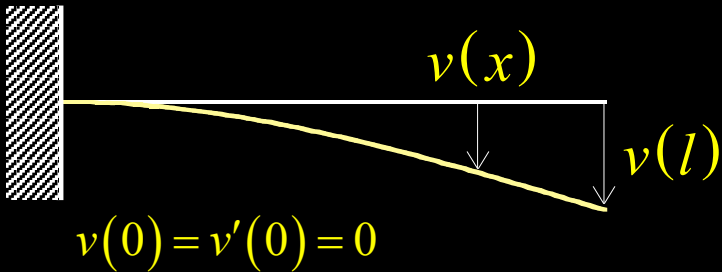
すなわち、変位で表した釣合微分方程式と変位で表した力学的境界条件が得られた。

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法3



最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法では、**たわみを仮定**する。この時、仮定するたわみは**幾何学的境界条件**を満足する必要がある。例えば、下式のように仮定する。

$$v(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3$$



全ポテンシャルエネルギー式は下式となる

$$\Pi[v(x)] = \int_0^l \frac{EI v''^2}{2} dx - P \cdot v(l)$$

仮定したたわみを代入すると下式となる

$$\Pi(a_2, a_3) = \int_0^l \frac{EI (2a_2 + 6a_3 x)^2}{2} dx - P \cdot (a_2 l^2 + a_3 l^3)$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく近似解法4

$$\Pi(a_2, a_3) = \int_0^l \frac{EI(2a_2 + 6a_3x)^2}{2} dx - P \cdot (a_2l^2 + a_3l^3)$$

最小の条件より，下式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi(a_2, a_3)}{\partial a_2} = \int_0^l 2EI(2a_2 + 6a_3x) dx - P \cdot l^2 = 0 \Rightarrow 4EIa_2 + 6EI l^2 a_3 - Pl^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi(a_2, a_3)}{\partial a_3} = \int_0^l EI(2a_2 + 6a_3x) \cdot 6x dx - P \cdot l^3 = 0 \Rightarrow 6EI l^2 a_2 + 12EI l^3 a_3 - Pl^3 = 0$$

整理すると下式が得られる。これは仮想仕事の原理に基礎をおく**スライド8**の式と同じである。この場合も**正解**が得られた。

$$\left. \begin{aligned} EI(4la_2 + 6l^2a_3) - Pl^2 &= 0 \\ EI(6l^2a_2 + 12l^3a_3) - Pl^3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

まとめ

- 1) 仮想仕事の原理, 最小ポテンシャルエネルギーの原理に基礎をおく**近似解法**を解説した.
- 2) どちらも幾何学的境界条件を満足する**たわみを仮定**する. たわみ関数は, **一般化座標** a_i と**基底** $f_i(x)$ を掛け合わせたものの級数として仮定する.
- 3) 仮定したたわみを用いて, 仮想仕事式を a_i , δa_i で, あるいは全ポテンシャルエネルギー Π を a_i で表現する.
- 4) 仮想仕事式では任意の δa_i で式が成立つこと, 最小ポテンシャルエネルギーの原理では最小になる条件より, **一般化座標** a_i に関する**連立方程式**が得られ, たわみが求まる.

注意 仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法が意味する事1

外力として分布荷重のみが作用するときの、仮想仕事の原理に基づく近似解法は下記のようなになる。

$$\int_0^l w(x) \cdot \delta v(l) dx = \int_0^l M \cdot \delta \phi dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \\ \delta v(x) = \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i(x) \\ \delta \phi(x) = \delta(-v''(x)) = -(\delta(v(x)))'' = -\sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i''(x) \\ M = EI\phi \equiv -EI \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i''(x) \end{array} \right.$$

$$\int_0^l w(x) \cdot \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i(x) dx = \int_0^l M \cdot \left(-\sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i''(x) \right) dx$$

注意 仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法が意味する事2

$$\int_0^l w(x) \cdot \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i(x) dx = \int_0^l M \cdot \left(-\sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i''(x) \right) dx$$

右边を**部分積分**して整理すると下式が得られる。

$$\int_0^l (M'' + w(x)) \cdot \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i(x) dx - \left[-M \cdot \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i'(x) + M' \cdot \sum_{i=1}^n \delta a_i \cdot f_i(x) \right]_0^l = 0$$

具体的な例を考えると理解できるが、左辺の第2項は0と考えて良い。
任意の δa_i に対して、上式が成立つには下式が成立つ必要がある。

$$\int_0^l (M'' + w(x)) \cdot f_i(x) dx = 0$$

上式の左辺にある $M'' + w(x)$ を0とすると、これは釣合微分方程式である。
仮想仕事の原理に基礎をおく近似解法は、釣合微分方程式に**重み** $f_i(x)$ をつけて積分した値が0という条件で**我慢**していることを表している。

次の解説について

近似解法 例題を

⑭ 近似解法 例題

で解説します。

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています。

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します。

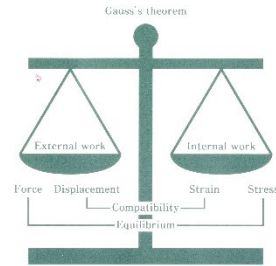
質問等の送付先は，ホームページに示しています。

仮想仕事の原理とエネルギー原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月

仮想仕事の 原理と エネルギー原理

トラス, 梁, 骨組



Keiigo ISUDA Masae KIDO
津田恵吾 / 城戸将江 (共著)

Virtual work and energy principles
for trusses, beams and frames

鹿島出版会

ISBN978-4-306-03388-7
C3052 ¥3500E

鹿島出版会

定価(本体3,500円+税)

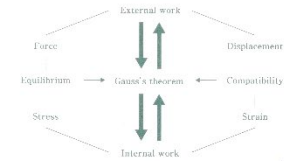


9784306033887



1923052035006

仮想仕事の
原理と
エネルギー原理
トラス, 梁, 骨組



Virtual work and energy principles for trusses, beams and frames